ΘΕΩΡΗΜΑ

i) Κανόνας σταθερού πολλ/συ: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ παραγωγίσιμη στο x_0 ενώ $c \in \mathbb{R}$. Τότε $h(x) = c \cdot f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $\boxed{Dh(x_0) = |c| \cdot Df(x_0)}$

ii) Κανόνας του Αθροίσματος: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $g: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ παραγωγίσιμες στο x_0. Τότε η $h(x) = f(x) + g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $\boxed{Dh(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)}$

iii) Κανόνας γινομένου: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο x_0. Τότε η $h(x) = g(x) \cdot f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $\boxed{Dh(x_0) = g(x_0) \cdot Df(x_0) + f(x_0) \cdot Dg(x_0)}$

iv) Κανόνας πηλίκου: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο x_0. Τότε η $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ παραγωγίσιμη στο x_0 και

$$\boxed{Dh(x_0) = \frac{g(x_0) \cdot Df(x_0) - Dg(x_0) \cdot f(x_0)}{[g(x_0)]^2}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ((i) και (ii))

i) ΘΔΟ η h διαφορίσιμη στο x_0

Εξ ορισμού πρέπει να επαληθευτεί ότι:

{ΟΜΟΙΑ (iii & iv)}

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|h(x) - h(x_0) - c \cdot Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\|c \cdot f(x) - c f(x_0) - c \cdot Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow |c| \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \overset{f\,\pi\alpha\rho.\,x_0}{\Leftrightarrow} \text{Ισχύει.}$$

ii) Πρέπει νδο $\lim_{x \to x_0} \frac{\|h(x) - h(x_0) - Df(x_0)(x - x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \quad (*)$

Η (*) αποδεικνύεται εύκολα από:

$$0 \leq \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0) + g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leq$$

$$\leq \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \lim_{x \to x_0} \frac{\|g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$